جامعة البعث
كلية العلوم
قسم الرياضيات

طبولوجيا (2)
ثانية رياضيات
أيلول ٢٠١٧

الاسم:
الرقم: ١١٨

السؤال الأول : 37 علامة

أ. عرّف الآتي: ١. النقطة الحدية لمجموعة. ٢. قاعدة الطبولوجيا. ٣. التطبيق المغلق. ٤. موضوعة العد الأولى. ٥. T_1 - فضاء.

ب. اثبت أنّ تقاطع عدد منتهٍ من جوارات نقطة في فضاء طبولوجي هو جوار لهذه النقطة.

ج. ليكن A فضاءً جزئياً من فضاء طبولوجي X، حيث A مجموعة مفتوحة. إذا كانت B مجموعة جزئية من A فاثبت أنّ B تكون مجموعة مفتوحة في A إذا وفقط إذا كانت مفتوحة في X.

السؤال الثاني : 33 علامة

لتكن $X=\{a,b,c,d\}$ و τ الطبولوجيا القوية (المتقطعة) على X.

أ. علل الآتي:
١) الفضاء (X,τ) متراص.
٢) الفضاء (X,τ) غير مترابط.
٣) الفضاء (X,τ) هو T_1 - فضاء.

ب.
١) عين قاعدة للطبولوجيا τ مختلفة عنها.
٢) عين المجموعة الكثيفة في هذا الفضاء.
٣) كم يبلغ عدد المجموعات المغلقة في هذا الفضاء.

ج. بفرض $A=\{a,b\}$، أوجد $\mathring{A},\ \bar{A},\ A',\ Fr(A),\ Ext(A)$.

السؤال الثالث : 30 علامة

أ. أثبت أنّ المجموعة A من الفضاء الطبولوجي X تكون مجموعة كثيفة فيه إذا وفقط إذا كانت تتقاطع مع جميع المجموعات المفتوحة غير الخالية في X.

ب. ليكن $f:X\to Y$ تطبيقاً من الفضاء الطبولوجي X إلى الفضاء الطبولوجي Y. إذا كانت الصورة العكسية وفق f لأي مجموعة مفتوحة في Y هي مجموعة مفتوحة في X، فأثبت أنّ f مستمر على X.

حمص في ١٣/٩/٢٠١٧ — د. طلب غريبة

1

سلم تصحيح مقرر الطبولوجيا العامة (2)

السنة الثالثة - رياضيات

الدورة الإضافية للعام ٢٠١٦/٢٠١٧

السؤال الأول (٢٧ علامة):

أ- التعاريف:

١- نقول عن النقطة x إنها نقطة جبهية للمجموعة A في الفضاء الطبولوجي (X,τ) إذا كان أي جوار لـ x يتقاطع مع A ومع متممتها $X\backslash A$. — 4

٢- لتكن $\mathcal{B}$ أسرة من المجموعات المفتوحة في الفضاء الطبولوجي (X,τ). نقول عن $\mathcal{B}$ إنها قاعدة للطبولوجيا τ إذا كان أي عنصر من τ يساوي اجتماعاً لعناصر من $\mathcal{B}$. — 4

٣- نسمي التطبيق $f: X \to Y$ من ف.ط. X إلى ف.ط. Y تطبيقاً مغلقاً إذا كانت الصورة المباشرة وفقاً لـ f لأي مجموعة مغلقة في X هي مجموعة مغلقة في Y. — 4

٤- مسلمة العد الأولى هي أن تمتلك أي نقطة من الفضاء الطبولوجي جملة أساسية من الجوارات قابلة للعد. — 4

٥- T_1 - فضاء هو الفضاء الذي يحقق الخاصة: من أجل أي نقطتين مختلفتين يوجد لكل منهما جوار لا يحوي النقطة الأخرى. — 4

ب- لتكن $V_1, V_2, \dots, V_n$ جوارات للنقطة x في الفضاء الطبولوجي X. سنثبت أن $\bigcap_{i=1}^{n} V_i = V$ هو جوار لـ x. بما أن V_i جوار لـ x، توجد مجموعة مفتوحة U_i بحيث: $x \in U_i \subseteq V_i$ $(i=1,2,\dots,n)$. — 7

وبما أن تقاطع عدد منته من المجموعات المفتوحة هو مجموعة مفتوحة

$$x \in \bigcap_{i=1}^{n} U_i \subseteq \bigcap_{i=1}^{n} V_i = V$$

فإن V يحوي مجموعة مفتوحة تحوي x أي أن V جوار لـ x.

ج- لزوم الشرط 5

كفاية الشرط 5

السؤال الثاني (٢٢ علامة):

3 أ - ١) الفضاء متراص لأن عدد مجموعاته المفتوحة منتهٍ.

3 ٢) الفضاء غير مترابط لأنه يساوي اجتماع مجموعتين مفتوحتين غير خاليتين وغير متقاطعتين مثل $\{a\}$ و $\{b, c, d\}$.

3 ٣) الفضاء هو T_2 - فضاء لأنه من أجل أي نقطتين مختلفتين x و y يوجد جوار لـ x هو $\{x\}$ وجوار لـ y هو $\{y\}$ وهذان الجواران لا يتقاطعان

3 ب - ١) إن أسرة المجموعات وحيدة العنصر تشكل قاعدة للطبولوجيا القوية

3 ٢) X هي المجموعة الكثيفة الوحيدة في هذا الفضاء

3 ٣) عدد المجموعات المغلقة $2^4 = 16$

جـ - 3 $A^\circ = A$ ، 3 $\bar{A} = A$ ، $A \neq \Phi$ 3 ، $Fr(A) = \bar{A} \setminus A^\circ = \Phi$ 3

3 $Ext(A) = X \setminus \bar{A} = X \setminus A$

السؤال الثالث (٢٠ علامة):

أ - البرهان: ١ - لزوم الشرط 8

٢ - كفاية الشرط 7

ب - لنأخذ نقطة كيفية x من الفضاء X وجواراً كيفياً W للنقطة $f(x)$ في Y. بحسب تعريف الجوار توجد مجموعة مفتوحة G بحيث: 5 $W \supseteq G \ni f(x)$. بأخذ الصورة العكسية نجد: $f^{-1}(W) \supseteq f^{-1}(G) \ni x$. وبما أن $f^{-1}(G)$ مفتوحة استناداً إلى الفرض، يكون $f^{-1}(W)$ جواراً لـ x في X. أي أن الصورة العكسية لأي جوار للنقطة $f(x)$ هي جوار للنقطة x، وبالتالي 5 f مستمر في النقطة x حسب مبرهنة. وبما أن x نقطة كيفية، إذن f مستمر في كل نقطة من نقاط X. 5

حمص في ١٢/٩/٢٠١٧

د. طالب غريب

[signature]